

代数 I 中間試験問題 June 2, 2015 (中野 伸)

- [1] 以下の命題を示せ .
- (1) 位数 2015 の群は位数 7 の元を持たない .
  - (2) アーベル群の任意の部分群は正規部分群である .
- [2] 自然数  $n$  に対して乗法群  $G_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  を考える .
- (1)  $G_{14}$  は巡回群であることを示し , その生成元を一つ求めよ .
  - (2)  $G_{15}$  が巡回群かそうでないか判定せよ .
- [3] 以下の主張はどちらも正しくない . それぞれについて反例をあげよ .
- (1) 2 つの有限群  $G_1, G_2$  が同じ位数を持つならば ,  $G_1$  と  $G_2$  は同型である .
  - (2) 群の準同型写像  $f: G \rightarrow H$  について , その像  $\text{Im } f$  と核  $\text{Ker } f$  がともにアーベル群ならば ,  $G$  もアーベル群である .
- [4] 3 次対称群
- $$S_3 = \langle \sigma, \tau \rangle = \{ \varepsilon, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau \}, \quad \sigma = (1\ 2\ 3), \quad \tau = (1\ 2)$$
- について以下の問いに答えよ .
- (1) 部分群  $H = \langle \tau \rangle = \{ \varepsilon, \tau \}$  に関する左剰余類分解を与えよ .
  - (2)  $H$  は正規部分群でないことを示せ .
  - (3)  $\sigma$  の属する共役類を求めよ .
  - (4) 中心を求めよ .