

## §1. 2次, 3次, 4次方程式の解の公式

定理 1.1 2次方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

の解は,  $b^2 - 4c$  の平方根をひとつ固定し, それを  $R$  とするとき,

$$\frac{-b + R}{2}, \quad \frac{-b - R}{2}$$

で与えられる.

定理 1.2 3次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

の解は,  $Y$  に関する 2次方程式

$$Y^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の 2 解それぞれの 3 乗根  $R, S$  を,  $RS = b^2 - 3c$  を満たすように一組固定するとき,

$$\frac{-b + R + S}{3}, \quad \frac{-b + \omega^2 R + \omega S}{3}, \quad \frac{-b + \omega R + \omega^2 S}{3}$$

で与えられる. ここで,  $\omega$  は 1 の原始 3 乗根

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

である.

定理 1.3 4次方程式

$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$$

の解は,  $Y$  に関する 3次方程式

$$Y^3 - (3b^2 - 8c)Y^2 + (3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e)Y - (b^3 - 4bc + 8d)^2 = 0$$

の 3 解それぞれの平方根  $R, S, T$  を,  $RST = -b^3 + 4bc - 8d$  を満たすように一組固定するとき,

$$\frac{-b + R + S + T}{4}, \quad \frac{-b + R - S - T}{4}, \quad \frac{-b - R + S - T}{4}, \quad \frac{-b - R - S + T}{4}$$

で与えられる.

定義 1.4  $n$  個の不定元 (変数)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の多項式  $f(x_1, \dots, x_n)$  は, 任意の  $\sigma \in S_n$  に対して

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つとき, 対称式であるという (正確には  $x_1, \dots, x_n$  の対称式という) .

定義 1.5  $n$  個の不定元 (変数)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に対して,

$$(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$$

を展開した式

$$X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} s_{n-1} X + (-1)^n s_n$$

によって定まる  $s_1, \dots, s_n$  を,  $x_1, \dots, x_n$  の基本対称式という. とくに,  $s_j$  を  $j$  次の基本対称式という.

例 1.6 基本対称式は対称式である.

$$n = 2 \text{ のとき } \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 \\ s_2 = x_1 x_2 \end{cases}$$

$$n = 3 \text{ のとき } \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases}$$

$$n = 4 \text{ のとき } \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ s_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \end{cases}$$

定理 1.7 (対称式の基本定理)  $x_1, \dots, x_n$  の任意の対称式  $f(x_1, \dots, x_n)$  に対して, ある  $n$  変数多項式  $G(X_1, \dots, X_n)$  が存在して,

$$f(x_1, \dots, x_n) = G(s_1, \dots, s_n)$$

が成り立つ. すなわち, 任意の対称式は基本対称式の多項式として表すことができる.