

§2. 体の拡大, 拡大次数

定義 2.1 体 K が体 L の部分体であるとき, L を K の拡大体という. このとき, 体の拡大 L/K ということが多い. また, M が K の拡大体で, かつ L が M の拡大体であるとき, M を拡大 L/K の中間体という.

定義 2.2 L/K を体の拡大とする.

- (1) L の部分集合 A に対して, A を含む最小の L/K の中間体を $K(A)$ と表し, K に A を添加した体という.
- (2) とくに A が有限集合で $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ のとき, $K(A)$ を $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と略記する.
- (3) ただひとつの $\alpha \in L$ により $K(\alpha)$ と表される体を K の単純拡大体という. この場合, α を拡大 $K(\alpha)/K$ の原始元という.

命題 2.3 L/K を体の拡大とし, $\alpha \in L$ とすると,

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \mid g(X), h(X) \in K[X], h(\alpha) \neq 0 \right\}$$

であり, さらにこれは K 上 α で生成される可換環 (すなわち, K と α を含む L の最小の部分環)

$$K[\alpha] = \{ g(\alpha) \mid g(X) \in K[X] \}$$

の商体である.

例 2.4 有理数体 \mathbb{Q} の拡大体について, いくつかの例をあげる.

$$(1) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} - 1) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathbb{Q}\left(\frac{1 + 3\sqrt{2}}{5 - 7\sqrt{2}}\right)$$

$$(2) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$(3) \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$$

$$(4) \quad \mathbb{Q}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}(\mathbb{R}, \sqrt{-1}) = \mathbb{C}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \subsetneq \mathbb{C}$$

定義 2.5 L/K を体の拡大とする. K 上のベクトル空間としての L の次元を拡大 L/K の次数といい $[L:K]$ で表す. $[L:K]$ が有限のとき, L/K は有限次拡大であるといい, そうでないとき無限次拡大であるという.

例 2.6 (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ は \mathbb{Q} 上 2 次拡大である, $[\mathbb{Q}(\sqrt{7}):\mathbb{Q}] = 2$

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ は \mathbb{Q} 上 3 次拡大である, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}):\mathbb{Q}] = 3$

補題 2.7 M を体の拡大 L/K の中間体とし, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in M, \beta_1, \dots, \beta_n \in L$ とする.

- (1) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が K 上 1 次独立, かつ β_1, \dots, β_n が M 上 1 次独立ならば, mn 個の L の元 $\alpha_i\beta_j$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) は K 上 1 次独立である.
- (2) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が K 上 M を生成し, かつ β_1, \dots, β_n が M 上 L を生成するならば, $\alpha_i\beta_j$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) は K 上 L を生成する.

定理 2.8 M を体の拡大 L/K の中間体とすると,

$$[L:K] = [L:M][M:K]$$

が成り立つ. とくに, L/K が有限次拡大であるためには, $L/M, M/K$ がともに有限次拡大であることが必要十分である.