

§5. 根の添加

以下で扱う準同型写像はどれも零写像ではないとする。

まず、体から体への準同型写像は単射であることに注意する。実際、体 K から体 M への準同型写像 $\sigma : K \rightarrow M$ の核 $\text{Ker } \sigma$ は体 K のイデアルだから、 $\{0\}$ または K のどちらかであるが、いま、 σ は零写像ではないとしているから、 $\text{Ker } \sigma = \{0\}$ であり、このことは σ の単射性を示している。

定義 5.1 L/K を体の拡大とする。

$$\sigma : K \rightarrow M, \quad \tau : L \rightarrow M$$

がそれぞれ K, L から体 M への準同型写像であって、

$$\forall a \in K \quad \text{に対して} \quad \sigma(a) = \tau(a)$$

をみたととき、 σ は τ の K への制限、あるいは、 τ は σ の L への延長であるという。また、このとき $\sigma = \tau|_K$ と表す。

定義 5.2 L, M がともに体 K の拡大体で、準同型写像

$$\sigma : L \rightarrow M$$

が K の恒等写像

$$\text{id}_K : K \rightarrow K$$

の延長であるとき、 σ を K 上の写像という。

定義 5.3 体の準同型写像

$$\sigma : K \rightarrow M$$

が与えられたとき、 $f(X) \in K[X]$ に対して、その係数に σ をほどこして得られる M 上の多項式を $f^\sigma(X)$ と表す。

定理 5.4 $f(X)$ を体 K 上の既約多項式とすると、剰余環 $K[X]/(f(X))$ は体である。さらに、

$$\text{包含写像 } \iota : K \rightarrow K[X] \text{ および、自然な全射 } \pi : K[X] \rightarrow K[X]/(f(X))$$

の合成写像として

$$\sigma = \pi \circ \iota : K \rightarrow K[X]/(f(X))$$

を定めると、 σ は体の準同型写像であり、 $x = X + (f(X)) \in K[X]/(f(X))$ とおけば、 $f^\sigma(x) = 0$ が成り立つ。

系 5.5 体 K 上の定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して, 体 M と, 単射準同型

$$\sigma : K \longrightarrow M,$$

および $x \in M$ が存在して, $f^\sigma(x) = 0$ をみたす.

定理 5.6 (クロネッカー) 体 K 上の定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して, K の拡大体で $f(X)$ の根を持つものが存在する. すなわち, K の拡大体 L とその元 α で $f(\alpha) = 0$ をみたすものが存在する.

注意 上の定理から, K 上の既約多項式 $f(X)$ に対して, K の拡大体 L と $f(X)$ の根 $\alpha \in L$ が存在する. 写像

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L, \quad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

は可換環の準同型写像である. ここで, $\text{Im } \varphi = K(\alpha) \subset L$ であることは明らかだが, 一方, $\text{Ker } \varphi$ が $K[X]$ のイデアル $(f(X))$ に一致することが, $f(X)$ の K 上の既約性から確認できる. したがって, 準同型定理より, φ は同型写像

$$\tilde{\varphi} : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\alpha)$$

を引き起こす. なお, 定理 5.4 の準同型写像 σ と $\tilde{\varphi}$ との合成 $\tilde{\varphi} \circ \sigma$ は, K から $K(\alpha)$ への包含写像に他ならない.

例 5.7 $f(X) = X^3 - 4X + 2$ は \mathbb{Q} 上既約であり, その任意の根 α に対して, $\mathbb{Q}(\alpha)$ は剰余環 $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ と同型である. $1, \alpha, \alpha^2$ は $\mathbb{Q}(\alpha)$ の \mathbb{Q} 上の基底であり, $\mathbb{Q}(\alpha)$ の任意の元は $1, \alpha, \alpha^2$ の \mathbb{Q} 上の 1 次結合で表される. そこで, たとえば

$$\beta = 1 + \alpha^2, \quad \gamma = 3 - 2\alpha + \alpha^2$$

の積は, 次の様に計算される. まず, 多項式の積

$$(1 + X^2)(3 - 2X + X^2) = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X + 3$$

を計算し, $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ における類を考えればよいから, この 4 次式を $f(X)$ で割って余りを求める;

$$X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X + 3 = (X - 2)f(X) + (8X^2 - 12X + 7),$$

こうして, 積 $\beta\gamma = 7 - 12\alpha + 8\alpha^2$ が計算できる.

定理 5.8 体 K 上の既約多項式 $f(X)$ とその任意の 2 根 α, β に対して, K 上の同型写像

$$\sigma : K(\alpha) \longrightarrow K(\beta)$$

で, $\sigma(\alpha) = \beta$ をみたすものが存在する.

例 5.9 $X^3 - 2$ は \mathbb{Q} 上既約であり, その実根 $\alpha = \sqrt[3]{2}$ をとれば他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$ である. このとき, $\mathbb{Q}(\alpha)$ と $\mathbb{Q}(\alpha\omega)$ は同型である. $1, \alpha, \alpha^2$ は $\mathbb{Q}(\alpha)$ の \mathbb{Q} 上の基底であり, 写像

$$\mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha\omega), \quad a + b\alpha + c\alpha^2 \mapsto a + b\alpha\omega + c\alpha^2\omega^2$$

が同型写像を与えている (ここで, $a, b, c \in \mathbb{Q}$). 同様にして, $\mathbb{Q}(\alpha)$ と $\mathbb{Q}(\alpha\omega^2)$ も同型である.