

§6. 代数的閉体と共役元

定義 6.1 体 L の代数拡大体が L のみであるとき, L を代数的閉体という.

例 6.2 (1) \mathbb{C} は代数的閉体である (代数学の基本定理).
 (2) \mathbb{R} は代数的閉体ではない.

定理 6.3 体 L に対して次は同値である.

- (i) L は代数的閉体である.
- (ii) L 上の既約多項式はすべて 1 次式である.
- (iii) L 上の定数でない任意の多項式は 1 次式の積に分解される.
- (iv) L 上の定数でない任意の多項式は L で根を持つ.

定義 6.4 体 K の代数拡大体であって代数的閉体であるものを K の代数的閉包という.

定理 6.5 Ω が代数的閉体ならば, Ω に含まれる任意の部分体に対して, その代数的閉包が Ω の中に一意的存在する.

例 6.6 (1) \mathbb{R} の代数的閉包は \mathbb{C} である.
 (2) \mathbb{Q} の代数的閉包は \mathbb{C} の部分体として一意に定まるが, それは \mathbb{C} ではない.

定理 6.7 (シュタイニッツ) 任意の体に対してその代数的閉包が存在する. さらに, L_1, L_2 がどちらも体 K の代数的閉包ならば, K 上の同型写像 $L_1 \rightarrow L_2$ が存在する.

以下で扱う体は, とくにことわらない限り, すべてある一つの代数的閉体に含まれているとする. したがって, 定理 6.5 より, 体 K に対してその中で代数的閉包が一意に定まる. それを \overline{K} で表す. このとき, K 上の代数拡大体はすべて \overline{K}/K の中間体である. 実際, L/K が代数拡大ならば, 定理 4.11 より $L\overline{K}$ は K 上代数的, したがって \overline{K} 上代数的でもある. よって代数的閉体の定義から $L\overline{K} = \overline{K}$, ゆえに $L \subset \overline{K}$ となる. また, このとき L の代数的閉包は \overline{K} と一致する (だって, それは \overline{K} 上代数的になるから, \overline{K} に一致するもん).

定義 6.8 体の拡大 L/K に対して, L から L への K 上の同型写像を, L の K 上の自己同型写像, または L/K の自己同型写像という. また, それら全体の集合を $\text{Aut}(L/K)$ と表し, L の K 上の自己同型群, あるいは L/K の自己同型群という,

$$\text{Aut}(L/K) = \{ \sigma \mid \sigma : L \rightarrow L, \quad K \text{ 上の同型写像} \}.$$

定理 6.9 L_1, L_2 が体 K 上の代数拡大体で,

$$\tau : L_1 \longrightarrow L_2$$

が K 上の同型写像であるとする. このとき, τ の延長 $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する. すなわち, 同型写像

$$\sigma : \overline{K} \longrightarrow \overline{K}$$

で, 任意の $a \in L_1$ に対して $\sigma(a) = \tau(a)$ であるものがとれる.

定義 6.10 K を体とする. $\alpha, \beta \in \overline{K}$ それぞれの K 上の最小多項式が一致するとき, α, β は K 上共役であるという. また, β を α の K 上の共役元ともいう. α の K 上の共役元全体の集合を $\text{Conj}(\alpha, K)$ で表す.

例 6.11 $z \in \mathbb{C}$ の複素共役 \bar{z} は, z の \mathbb{R} 上の共役元であり, $\text{Conj}(z, \mathbb{R}) = \{z, \bar{z}\}$ が成り立つ.

定理 6.12 体 K と $\alpha, \beta \in \overline{K}$ に対して次は同値である.

- (i) α, β は K 上共役である.
- (ii) $\sigma(\alpha) = \beta$ をみたす $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する.

系 6.13 体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して,

$$\text{Conj}(\alpha, K) = \{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K) \}$$

が成り立つ.

定理 6.14 体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して,

$$|\text{Aut}(K(\alpha)/K)| \leq |\text{Conj}(\alpha, K)| \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ.