

§7. 標数と分離性

K を体とする．自然数 n に対して $1 \in K$ の n 個の和を $\Gamma(n)$ とする；

$$\Gamma(n) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_n$$

さらに， $\Gamma(-n) = -\Gamma(n)$ ， $\Gamma(0) = 0$ と定めれば，整数環 \mathbb{Z} から体 K への準同型写像 $\Gamma: \mathbb{Z} \rightarrow K$ が定義される．核 $\text{Ker } \Gamma$ は \mathbb{Z} の素イデアルなので， $\text{Ker } \Gamma = (p)$ (ただし $p = 0$ または素数) となる．

定義 7.1 体 K に対して， $\text{Ker } \Gamma = (p)$ をみたく $p \geq 0$ を K の標数という．上述のように K の標数は 0 または素数である．

定義 7.2 素数 p に対して

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

とおく． \mathbb{F}_p は p 個の元からなる有限体であって，標数は p である．

定理 7.3 (1) 体 K の標数が 0 ならば，単射準同型

$$\mathbb{Q} \longrightarrow K$$

が一意的に存在する．すなわち， K は有理数体 \mathbb{Q} と同型な部分体をもつ．

(2) 体 K の標数が p ならば，単射準同型

$$\mathbb{F}_p \longrightarrow K$$

が一意的に存在する．すなわち， K は有限体 \mathbb{F}_p と同型な部分体をもつ．

定義 7.4 体 K 上の多項式

$$f(X) = \sum_{j=0}^n c_j X^j = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0, \quad c_j \in K$$

に対して，

$$f'(X) = \sum_{j=1}^n j c_j X^{j-1} = n c_n X^{n-1} + (n-1) c_{n-1} X^{n-2} + \cdots + c_1$$

を $f(X)$ の形式的微分 (または単に微分) という．

命題 7.5 体 K 上の多項式 $f(X), g(X)$ に対して次が成り立つ .

- (1) 任意の $a \in K$ に対して $\{af(X)\}' = af'(X)$,
- (2) $\{f(X) + g(X)\}' = f'(X) + g'(X)$,
- (3) $\{f(X)g(X)\}' = f'(X)g(X) + f(X)g'(X)$,
- (4) $\{f(g(X))\}' = f'(g(X))g'(X)$.

定義 7.6 体 K 上の多項式 $f(X)$ が \overline{K} において重根をもたないとき, $f(X)$ は分離的であるという . 分離的な多項式を分離多項式ともいう .

補題 7.7 体 K 上の多項式 $f(X)$ に対して次の (i), (ii) は同値である .

- (i) $f(X)$ は分離的でない .
- (ii) $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ をみたす $\alpha \in \overline{K}$ が存在する .

さらに $f(X)$ が K 上既約ならば, 次とも同値である .

- (iii) $f'(X)$ は零多項式である .

定理 7.8 K を標数 p の体とし, $f(X)$ を K 上の既約多項式とする .

- (1) $p = 0$ のとき, $f(X)$ は分離的である .
- (2) $p > 0$ のとき, $f(X)$ が分離的であるためには, $f(X) = g(X^p)$ をみたす K 上の多項式 $g(X)$ が存在しないことが必要十分である .

定義 7.9 K を体とする .

- (1) $\alpha \in \overline{K}$ の K 上の最小多項式が分離的であるとき, α は K 上分離的であるという .
- (2) 代数拡大 L/K において, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を分離拡大という . また, このとき L は K 上分離的であるともいう .

定理 7.10 K を体とする . $\alpha \in \overline{K}$ について, 次は同値である .

- (i) α は K 上分離的である .
- (ii) $|\text{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K]$ が成り立つ .

補題 7.11 K を体とし, $\alpha, \beta \in \overline{K}$ とする . α が K 上分離的ならば, $K(\alpha, \beta) = K(\gamma)$ をみたす $\gamma \in \overline{K}$ が存在する .

定理 7.12 任意の有限次分離拡大は単純拡大である . すなわち L/K が有限次分離拡大ならば, $L = K(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ が存在する .

定理 7.13 標数 0 の体 K について次が成り立つ .

- (1) K 上のすべての既約多項式は分離的である .
- (2) K 上のすべての代数拡大体は分離的である .
- (3) K 上のすべての有限次拡大体は単純である .