§5. 根の添加

以下で扱う準同型写像はどれも零写像ではないとする．

まず，**体から体への準同型写像は単射**であることに注意する． 実際，体 K から体 M への準同型写像 $\sigma : K \longrightarrow M$ の核 $\operatorname{Ker}\sigma$ は体 K のイデアルだから，$\{0\}$ または K のどちらかであるが，いま，σ は零写像ではないとしているから，$\operatorname{Ker}\sigma = \{0\}$ であり，このことは σ の単射性を示している．

定義 5.1 L/K を体の拡大とする．

$$\sigma : K \longrightarrow M, \qquad \tau : L \longrightarrow M$$

がそれぞれ K, L から体 M への準同型写像であって，

$$\forall a \in K \quad \text{に対して} \quad \sigma(a) = \tau(a)$$

をみたすとき，σ は τ の K への**制限**，あるいは，τ は σ の L への**延長**であるという． また，このとき $\sigma = \tau|_K$ と表す．

定義 5.2 L, M がともに体 K の拡大体で，準同型写像

$$\sigma : L \longrightarrow M$$

が K の恒等写像

$$\mathrm{id}_K : K \longrightarrow K$$

の延長であるとき，σ を K **上の写像**という．

定義 5.3 体の準同型写像

$$\sigma : K \longrightarrow M$$

が与えられたとき，$f(X) \in K[X]$ に対して，その係数に σ をほどこして得られる M 上の多項式を $f^\sigma(X)$ と表す．

定理 5.4 $f(X)$ を体 K 上の既約多項式とすると，剰余環 $K[X]/(f(X))$ は体である． さらに，

包含写像 $\iota : K \longrightarrow K[X]$ および，自然な全射 $\pi : K[X] \longrightarrow K[X]/(f(X))$

の合成写像として

$$\sigma = \pi \circ \iota : K \longrightarrow K[X]/(f(X))$$

を定めると，σ は体の準同型写像であり，$x = X + (f(X)) \in K[X]/(f(X))$ とおけば，$f^\sigma(x) = 0$ が成り立つ．

系 5.5　体 K 上の定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，体 M と，単射準同型

$$\sigma : K \longrightarrow M,$$

および $x \in M$ が存在して，$f^{\sigma}(x) = 0$ をみたす．

定理 5.6 (クロネッカー) 体 K 上の定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，K の拡大体で $f(X)$ の根を持つものが存在する． すなわち，K の拡大体 L とその元 α で $f(\alpha) = 0$ をみたすものが存在する．

注意　上の定理から，K 上の既約多項式 $f(X)$ に対して，K の拡大体 L と $f(X)$ の根 $\alpha \in L$ が存在する． 写像

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L, \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

は可換環の準同型写像である． ここで，$\operatorname{Im}\varphi = K(\alpha) \subset L$ であることは明らかだが，一方，$\operatorname{Ker}\varphi$ が $K[X]$ のイデアル $(f(X))$ に一致することが，$f(X)$ の K 上の既約性から確認できる． したがって，準同型定理より，φ は同型写像

$$\tilde{\varphi} : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\alpha)$$

を引き起こす． なお，定理 5.4 の準同型写像 σ と $\tilde{\varphi}$ との合成 $\tilde{\varphi} \circ \sigma$ は，K から $K(\alpha)$ への包含写像に他ならない．

例 5.7　$f(X) = X^3 - 4X + 2$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であり，その任意の根 α に対して，$\mathbb{Q}(\alpha)$ は剰余環 $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ と同型である． $1, \alpha, \alpha^2$ は $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底であり，$\mathbb{Q}(\alpha)$ の任意の元は $1, \alpha, \alpha^2$ の $\mathbb{Q}$ 上の 1 次結合で表される． そこで，たとえば

$$\beta = 1 + \alpha^2, \qquad \gamma = 3 - 2\alpha + \alpha^2$$

の積は，次の様に計算される． まず，多項式の積

$$(1 + X^2)(3 - 2X + X^2) = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X + 3$$

を計算し，$\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ における類を考えればよいから，この 4 次式を $f(X)$ で割って余りを求める;

$$X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X + 3 = (X - 2)f(X) + (8X^2 - 12X + 7),$$

こうして，積 $\beta\gamma = 7 - 12\alpha + 8\alpha^2$ が計算できる．

定理 5.8　体 K 上の既約多項式 $f(X)$ とその任意の 2 根 α, β に対して，K 上の同型写像

$$\sigma : K(\alpha) \longrightarrow K(\beta)$$

で，$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたすものが存在する．

例 5.9　$X^3 - 2$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であり，その実根 $\alpha = \sqrt[3]{2}$ をとれば他の根は $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ である． このとき，$\mathbb{Q}(\alpha)$ と $\mathbb{Q}(\alpha\omega)$ は同型である． $1, \alpha, \alpha^2$ は $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底であり，写像

$$\mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha\omega), \qquad a + b\alpha + c\alpha^2 \ \mapsto \ a + b\alpha\omega + c\alpha^2\omega^2$$

が同型写像を与えている（ここで，$a, b, c \in \mathbb{Q}$）． 同様にして，$\mathbb{Q}(\alpha)$ と $\mathbb{Q}(\alpha\omega^2)$ も同型である．