

代数II 小テスト 2017-11-21

学年	学籍番号	氏名

[問1] 以下の文のそれぞれについて, 正しいものには ○ を, 正しくないものには × をカッコ内に記せ. ただし, L/K を体の拡大, $\alpha \in L$ とし, 写像

$$\varphi: K[X] \longrightarrow L, \quad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

を考える.

- () 写像 φ は (可換環の) 準同型写像である.
- () $\frac{1}{\alpha^2 + 1} \in \text{Im } \varphi$ ならば, α は K 上代数的である.
- () α が K 上超越的ならば, $\text{Im } \varphi$ は体である.
- () $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ならば, α は K 上代数的である.
- () α が K 上代数的で, $f(X)$ が α の K 上の最小多項式ならば, $\text{Ker } \varphi = (f(X))$ が成り立つ.
- () $f(\alpha) = 0$ をみたす K 上の任意の多項式 $f(X)$ に対して, 体 $K(\alpha)$ は剰余環 $K[X]/(f(X))$ と同型である.
- () \mathbb{R} 上の任意の3次多項式 $f(X)$ に対して, 剰余環 $\mathbb{R}[X]/(f(X))$ は体である.
- () \mathbb{C} は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ と同型である.
- () \mathbb{C} は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 3)$ とは同型ではない.

[問2] α を $X^3 - X - 1$ の根とするとき, $\frac{3\alpha - 2}{\alpha^{10}} = a + b\alpha + c\alpha^2$ をみたす有理数 a, b, c を定めよ.

$a =$	$b =$	$c =$
-------	-------	-------