

代数II 試験問題 Jan. 31, 2014 (中野 伸)

- [1] 任意の体上の任意の2次拡大は正規拡大であることを証明せよ .
- [2]  $f(X) = X^3 + 3X - 2$  について以下の問に答えよ .
- (1)  $f(X)$  は  $\mathbb{Q}$  上既約であることを示せ .
  - (2)  $\alpha$  を  $f(X)$  のひとつの根とするととき ,  $\frac{4}{\alpha^2}$  を ,  $1, \alpha, \alpha^2$  の  $\mathbb{Q}$  上の1次結合で表せ .
- [3]  $\alpha = \sqrt{6} + \sqrt{5}$  に対して , 以下の問に答えよ .
- (1)  $\alpha$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を求めよ .
  - (2)  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$  はガロア拡大であることを示せ .
  - (3)  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$  が  $\sigma(\alpha) = \sqrt{6} - \sqrt{5}$  をみたすとき ,  $\sigma$  の位数は2であることを示せ .
  - (4) 上の  $\sigma$  について ,  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$  の部分群  $\langle \sigma \rangle$  に対応する中間体を求めよ .
- [4]  $\zeta \in \mathbb{C}$  を1の原始3乗根とし ,  $K = \mathbb{Q}(\zeta)$  とおく .  $L/K$  を3次ガロア拡大とし , ガロア群の生成元を  $\sigma$  とする .  $\beta \in L$  に対して ,

$$\alpha = \beta + \zeta^2 \sigma(\beta) + \zeta \sigma^2(\beta)$$

とおくとき , 以下の問に答えよ .

- (1)  $\sigma(\alpha) = \zeta \alpha$  を示せ .
- (2)  $\alpha^3 \in K$  であることを証明せよ .