

代数II 試験問題 Jan. 29, 2015 (中野 伸)

- [1] $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$ は \mathbb{Q} 上 1 次独立であることを示せ .
- [2] α を $x^4 - 3$ の正の実数根とする . α の \mathbb{Q} 上の共役元をすべて求めよ .
- [3] L/K を体の 5 次拡大とし , $\beta \in L, \beta \notin K$ であるとき ,
(1) $L = K(\beta)$ (2) $\beta^3 \notin K$
が成り立つことをそれぞれ示せ .
- [4] 多項式 $f(x) = x^3 - 7x - 2$ に対して以下の問に答えよ .
(1) $f(x)$ は \mathbb{Q} 上既約であることを示せ .
(2) γ を $f(x)$ の根とするとき , $\gamma + 1$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ .
- [5] w を 1 の原始 3 乗根 ($w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ と考えてよい) とする .
 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, w)$ は \mathbb{Q} 上ガロア拡大であることを示せ .
- [6] $f(x)$ を \mathbb{Q} 上奇数次既約多項式とし , δ を $f(x)$ の根とする . $\mathbb{Q}(\delta)/\mathbb{Q}$ がガロア拡大ならば , δ は実数であることを示せ .