代数 II　試験問題 Jan. 31, 2018　(中野 伸)

注意: 【答えのみ】と書いてあるものを除き，答えに至る考え方も書くこと.

[1]　以下の問いに答えよ.

(1)　$\alpha^3+\alpha^2-3=0$ をみたす複素数 α に対して，$\dfrac{1}{\alpha+2}=g(\alpha)$ をみたす $\mathbb{Q}$ 上の多項式 $g(X)$ を求めよ【答えのみ】.

(2)　$\sqrt[4]{5}-\sqrt{5}-1$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の最小多項式を求めよ【答えのみ】.

(3)　X^3+aX^2+1 が，$\mathbb{F}_3$ 上既約でかつ $\mathbb{F}_5$ 上可約になるような整数 a を見つけよ.

[2]　実数 x, y に対して複素数 $z=x+iy$ を考える（i は虚数単位）. 以下の命題を示せ.

(1)　x, y がどちらも $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，z も $\mathbb{Q}$ 上代数的である.

(2)　z が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，z の複素共役 $\bar{z}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である.

(3)　z が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，x, y はどちらも $\mathbb{Q}$ 上代数的である.

[3]　$\alpha=\sqrt{2}\sqrt[3]{5}$ に対して，以下の問いに答えよ.

(1)　$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\alpha)$ かつ $\sqrt[3]{5}\in\mathbb{Q}(\alpha)$ であることを示せ.

(2)　α の $\mathbb{Q}$ 上の共役元をすべて求めよ【答えのみ】.

(3)　$\mathbb{Q}(\alpha)$ を含む $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大のうち最小のものを求め，その $\mathbb{Q}$ 上の次数を答えよ.

[4]　体の拡大 L/K について以下の命題を証明せよ.

(1)　L/K が代数拡大ならば，K の代数的閉包は L の代数的閉包でもある.

(2)　$[L:K]=8$ ならば，$[M:K]=6$ をみたす中間体 M は存在しない.

(3)　$[L:K]=2$ ならば，L/K は正規拡大である.