

代数入門 中間試験問題 Nov. 29, 2016 (中野 伸)

注意: 数値等を求める問題について, 【答えのみ】と書いてあるもの以外は, 答えに至る考え方も書くこと.

- [1] $f: \mathbf{Z}/20\mathbf{Z} \rightarrow (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})$ を自然な全単射とする.
- (1) $f(\overline{11}) = (\overline{x}, \overline{y})$ をみたす整数の組 x, y (ただし $0 \leq x < 4, 0 \leq y < 5$) を求めよ【答えのみ】.
 - (2) $f(\overline{z}) = (\overline{2}, \overline{3})$ をみたす整数 z (ただし $0 \leq z < 20$) を求めよ【答えのみ】.
- [2] ユークリッドの互除法を用いて, 31007 と 27323 の最大公約数 d の値と, $31007x + 27323y = d$ をみたす整数の組 (x, y) を1つ求めよ.
- [3] $40 < x, y < 50$ であって, 連立合同式
$$\begin{cases} 3x - 4y \equiv 1 \pmod{9} \\ -x + 5y \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$$
 をみたす自然数の組 (x, y) を求めよ.
- [4] 連立合同式
$$\begin{cases} 5x \equiv 6 \pmod{49} \\ x \equiv -1 \pmod{48} \end{cases}$$
 をみたす最小の自然数 x を求めよ.
- [5] $m = 2016$ について次の問に答えよ.
- (1) m の素因数分解を求めよ【答えのみ】.
 - (2) $700 \leq a \leq 715$ をみたす自然数 a のうち, 法 m に関して可逆であるものをすべて求めよ.
 - (3) 5^{5763} を m で割ったときの余りを求めよ.
- [6] 1 より大きい自然数 a, b に関する以下の各命題について, 正しければ証明を, 正しくなければ反例を与えよ.
- (1) $a^2 \mid b^3$ ならば, $a \mid b$ が成り立つ.
 - (2) a, b が互いに素ならば, $\log_a b$ は無理数である.
 - (3) $2^a - 1$ が素数ならば, a も素数である.