

3 Turing 機械の定義

[I] 単純な仕掛けによって動作する仮想的な“機械”を想定し、それによって、自然数値関数を“計算”することを考える。

[II] 機械の構成と基本動作

- 機械はテープとヘッドからなる。詳しくは、
 - テープは左右に無限に長く、その上に無数の“こま”が並んでいる。
 - ひとつひとつの“こま”には文字が書き込まれている。
 - ヘッドはテープ上のひとつの“こま”に接触している。
- テープおよびヘッドは、後述する指令によって以下の2種の動作をする。
 - ヘッドは、左右どちらかにひとこま動く。これはテープがひとこま移動することと同じである。
 - ヘッドは、接触している“こま”に書かれた文字を読んだり書き換えたりする。

[III] 文字・内部状態・時点表示

- テープ上の“こま”に書かれる文字は、あらかじめ定められた2つ以上有限個、たとえば

$$0 \quad 1 \quad * \quad \#$$

の中から選ばれるとする。ここで 0 は空白を表し、とくに指定しない“こま”には 0 が書かれているものとする。

- 機械の内部状態を想定し、小文字のアルファベット

$$a \quad b \quad c \quad \dots$$

で表す。内部状態は可算無限個取り得るとする。

- ある時点での機械全体の様子は、テープ上の文字列、ヘッドの位置、内部状態によって完全に定まる。いま、たとえば

テープ上の文字列 $11*1110\#1*$
 ヘッドの位置 左から 3 番目の $*$ の書かれた “こま”
 内部状態 a

であるとき、機械全体の様子を

$11a*1110\#1*$

によって表すことにする。このような表示を時点表示という。

[IV] 指令と動作

x, y を内部状態、 U, V を文字とするとき、

$xUVy, \quad xULy, \quad xURy$

をそれぞれ書き換え指令、左移動指令、右移動指令という。ここで、 L, R はテープ上に書かれる文字とは異なるものとする。これらによって機械の動作が以下のように定義される:

内部状態が x で、ヘッドが接触している “こま” に書かれている文字が U であるとき、

- 書き換え指令 $xUVy$ は、ヘッドの触れている “こま” を V に書き換え、内部状態を y に変える。
- 左移動指令 $xULy$ は、ヘッドを左にひとこま移動し、内部状態を y に変える。
- 右移動指令 $xURy$ は、ヘッドを右にひとこま移動し、内部状態を y に変える。

指令による時点表示の変化をまとめると次のようになる:

指 令	実 行 前	→	実 行 後
$xUVy$	$\dots xU\dots$	→	$\dots yV\dots$
$xULy$	$\dots U'xU\dots$	→	$\dots yU'U\dots$
$xURy$	$\dots xUV'\dots$	→	$\dots UyV'\dots$

内部状態が x でないか、または、ヘッドの読み取っている文字が U でないときは、これらの指令で時点表示は変化しないものとする。

[V] 機械の定義と動作例

- 機械とは、最初の 2 文字が相異なる有限個の指令からなる集合のことである。
- 機械 Z と時点表示 T が与えられたとき、 T を初期値とする Z -計算とは、時点表示の列

$$T_0, T_1, \dots, T_n$$

で、

- $T = T_0$.
- 各 i ($0 < i \leq n$) に対して、 Z に属する指令が存在して、 T_{i-1} にその指令をほどこすと T_i が得られる。
- T_n は、 Z に属するどの指令によっても変化しない。

なるものである。最後に得られた時点表示 T_n を、 Z -計算の値といい $Z(T)$ で表す。

- 例 1

$$Z = \{a * \# b, b \# R c, c 1 L d\}$$

$$T = 1 1 a * 1 1 1 0 1 1 *$$

であるとき、 T を初期値とする Z -計算を求めよう: 初期値

$$T_0 = 1 1 a * 1 1 1 0 1 1 *$$

は指令 $a * \# b$ によって

$$T_1 = 1 1 b \# 1 1 1 0 1 1 *$$

に変化する。さらに、指令 $b \# R c$ によって

$$T_2 = 1 1 \# c 1 1 1 0 1 1 *$$

となり、指令 $c 1 L d$ によって

$$T_3 = 1 1 d \# 1 1 1 0 1 1 *$$

となる。 Z が $d \#$ で始まる指令を含まないので Z -計算はここで停止し、

$$Z(T) = T_3$$

となる。

● 例2 機械 Z を

$$Z = \{a * R a, a \# R a, a 0 R a, a 1 1 b\}$$

と定義すれば、時点表示

$$a * 0 0 \# * 1 *$$

に対して

$$\begin{aligned} & a * 0 0 \# * 1 * \\ \longrightarrow & * a 0 0 \# * 1 * \quad \longrightarrow \quad * 0 a 0 \# * 1 * \\ \longrightarrow & * 0 0 a \# * 1 * \quad \longrightarrow \quad * 0 0 \# a * 1 * \\ \longrightarrow & * 0 0 \# * a 1 * \quad \longrightarrow \quad * 0 0 \# * b 1 * \end{aligned}$$

となって終了する。

しかし、別の時点表示を初期値とすると、たとえば

$$\begin{aligned} & a * 0 0 \# \quad \longrightarrow \quad * a 0 0 \# \quad \longrightarrow \quad * 0 a 0 \# \\ \longrightarrow & * 0 0 a \# \quad \longrightarrow \quad * 0 0 \# a \quad \longrightarrow \quad * 0 0 \# 0 a \\ \longrightarrow & * 0 0 \# 0 0 a \quad \longrightarrow \quad * 0 0 \# 0 0 0 a \quad \longrightarrow \quad \dots \end{aligned}$$

のように操作は無限に続き、終了することがない。