

10 ゲーデル数からの原始帰納的関数の構成

[I] 与えられた自然数をゲーデル数にもつ原始帰納的関数の構成

以後、簡単のため

$$\begin{cases} \nu_i(x) = \nu(p_{i-1}, x), & i = 1, 2, \dots \\ \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \prod_{i=1}^n p_{i-1}^{e_i} = 2^{e_1} 3^{e_2} \dots p_{n-1}^{e_n} \end{cases}$$

とする。

定理 1 x が原始帰納的関数 f のゲーデル数のとき、

$$\text{PapI}(x, y) = f(\nu_1(y), \dots, \nu_n(y)), \quad \text{ただし } n = \text{PRF}(x),$$

そうでないとき $\text{PapI}(x, y) = 0$ となるような \mathcal{M} に属する 2 変数関数 $\text{PapI}(x, y)$ が存在する。

証明： $\text{PRF}(x)$ の定義の際の x の条件 (G1)–(G5) によって場合分けして、次のように $\text{PapI}(x, y)$ を定義する。

(G1) のとき、

$$\text{PapI}(2, y) = 0$$

(G2) のとき、

$$\text{PapI}(6, y) = S(\nu_1(y))$$

(G3) のとき、 $n = \nu(2, x)$, $i = \nu(5, x)$ とし、

$$\text{PapI}(x, y) = \nu_i(y)$$

(G4) のとき、条件をみたす m をとり、 $x_i = \nu(p_i, x)$, $i = 1, \dots, m+1$ とし、

$$\text{PapI}(x, y) = \text{PapI}(x_{m+1}, \langle \text{PapI}(x_1, y), \dots, \text{PapI}(x_m, y) \rangle)$$

(G5) のとき、 $n = \nu(2, x) - 1$ とし、

$$\text{Pap}_1(x, y) = T(\nu_1(y), G(\nu_1(y), \dots, \nu_{n+1}(y))),$$

ただし、 $G(z, z_1, \dots, z_n)$ は次のように定義される;

$$G(z, z_1, \dots, z_n) = \mu_w[$$

$$T(0, w) = \text{Pap}_1(x_g, \langle 0, z_1, \dots, z_n \rangle) \text{ かつ}$$

$$z = \mu_{j \leq z} [T(j+1, w) \neq \text{Pap}_1(x_h, \langle T(j, w), j, z_1, \dots, z_n \rangle)$$

$$\text{または } j = z]]$$

ここで、 $x_g = \nu(3, x)$, $x_h = \nu(5, x)$ とする。

最後に、(G1)–(G5) のいずれでもないとき、 $\text{Pap}_1(x, y) = 0$ と定めれば、 $\text{Pap}_1(x, y)$ は求める関数となる。 (証明終)

次に、 $n \geq 1$ なる各 n に対して、

$$\text{Pap}_n(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} \text{Pap}_1(x, \langle y_1, \dots, y_n \rangle), & \text{PRF}(x) = n \text{ のとき,} \\ 0, & \text{そうでないとき,} \end{cases}$$

と定義すれば、 $\text{Pap}_n(x, y_1, \dots, y_n)$ は、 x が n 変数原始帰納的関数 f のゲーデル数のとき $f(y_1, \dots, y_n)$ を値とし、そうでないとき 0 となる関数である。

いま、 $\text{Pap}_1(x, y)$ が原始帰納的関数であると仮定すれば

$$f(x) = \text{Pap}_1(x, x) + 1$$

も 1 変数原始帰納的関数である。そこで、 $a = \ulcorner f \urcorner$ とすれば、 Pap_1 の性質から

$$\text{Pap}_1(a, y) = f(y)$$

したがって、

$$\text{Pap}_1(a, y) = \text{Pap}_1(y, y) + 1$$

ここで、 y に a を代入すれば矛盾する。よって、 Pap_1 は原始帰納的ではない。同様に、各 $n \geq 1$ について Pap_n が原始帰納的ではないことが示される。すなわち次の定理を得る。

定理 3 Pap_1 および、 Pap_n ($n = 1, 2, \dots$) は原始帰納的関数ではない。

系 $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{M}$.